Unicité de l'ellipse de Steiner

29 novembre 2019

L'ellipse de Steiner associée à un triangle (non dégénéré) du plan affine est une ellipse tritangente aux milieux des sommets. On montre que cette ellipse existe bel et bien et qu'elle est unique. L'existence est prouvée dans le carnet de voyage en Algébrie, exercice 3.4.1. Elle est basée sur l'action (simplement) transitive du groupe GA_2 sur les triangles (que l'on peut assimiler à des repères affines) du plan affine réel. On se ramène au cas où le triangle est équilatéral (après avoir transformé sans douleur le plan affine en plan euclidien), et dans ce cas, une ellipse existe : il s'agit du cercle inscrit.

Il peut être intéressant d'observer différentes méthodes pour l'unicité de cette ellipse de Steiner.

Méthode 1 (par les rotations planes) : Il s'agit de la preuve que l'on peut trouver dans le CV-Algébrie, exercice 3.4.2. On se ramène donc au triangle équilatéral et on doit montrer que s'il existe une ellipse tritangente aux milieux des arêtes, il s'agit du cercle inscrit. On transforme cette ellipse en cercle par une transformation affine, et il faut prouver que le triangle ainsi transformé est équilatéral. On prouve que ce triangle vérifie alors une propriété peu commune : son cercle inscrit et son cercle circonscrit sont concentriques, puisque l'intersection des médiatrices et l'intersection des bissectrices coïncident en un point O. On peut alors construire une rotation r de centre O qui envoie un sommet vers un autre sommet. Le fait que r conserve les deux cercles et l'orthogonalité implique d'elle conserve le triangle. Et un triangle conservé par une rotation est équilatéral.

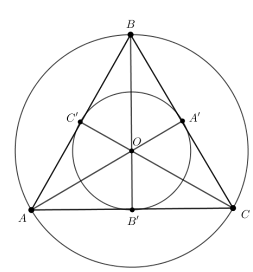

FIGURE 1 – Intersection des médiatrices=Intersection des bissectrices

(Attention, les médiatrices ne passent pas *a priori* par les sommets !)

Variante : Une variante express proposée par Daniel Perrin : si le cercle inscrit, de rayon r, et le cercle circonscrit, de rayon R, sont concentriques, alors chaque demi-côté du triangle est de longueur de carré $R^2 - r^2$, par Pythagore, voir figure ci-dessous. Il est donc équilatéral.

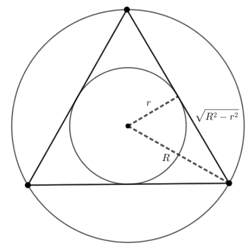

FIGURE 2 – 14h20 à la pendule des géomètres

Méthode 2 (par les triangles semblables) : On peut la trouver dans le livre de Skandalis [Agrégation interne, Algèbre générale...]. Comme ci-dessus, on se ramène au triangle équilatéral et on doit montrer que s'il existe une ellipse tritangente aux milieux des arêtes, il s'agit du cercle inscrit. On transforme encore une fois cette ellipse en cercle par une transformation affine, et il faut prouver que le triangle ainsi transformé est équilatéral. Soit ABC ce triangle, A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$, et O le centre du cercle inscrit. Alors, les triangles AOB' et AOC' ont deux côtés de même longueur ($AO = AO$, $OB' = OC'$) et un angle droit en B' pour l'un et C' pour l'autre. Ils sont donc semblables, et même isométriques. Maintenant, les triangles AOC' et BOC' sont également isométriques : ils ont deux côtés égaux ($OC' = OC'$ et $AC' = BC'$) et un angle droit au bon endroit (en C'). On voit facilement que l'on peut paver le triangle ABC en six triangles isométriques et que donc, il est équilatéral.

Méthode 3 (par les formes polaires) : On suppose deux ellipses tritangentes aux milieux des arêtes d'un triangle quelconque (non dégénéré) ABC et on veut montrer qu'elles sont égales. On peut les définir par une équation, respectivement $q(x) + \lambda(x) = 1$ et $q'(x) + \lambda'(x) = 1$, et on veut montrer que les formes quadratiques q et q' sont égales, ainsi que les formes linéaires λ et λ'. On note encore φ et φ' les formes polaires respectives de q et q'. On rappelle que $q(x_0 + h) = q(x_0) + 2\varphi(x_0, h) + q(h)$, est une décomposition de Taylor au voisinage de x_0 et donc que la forme $2\varphi(x_0, ?)$ est la différentielle de q en x_0. Comme les deux ellipses ont trois points commun (u, v, w) avec mêmes tangentes, et comme on sait que la tangente aux lignes de niveau est donnée par l'annulation de la différentielle au point, on déduit que les formes linéaires $2\varphi(u, ?) + \lambda$ et $2\varphi'(u, ?) + \lambda'$ ont même noyau, dit autrement $2\left(\varphi(u, ?) + \lambda\right)^{\perp} = \left(2\varphi'(u, ?) + \lambda'\right)^{\perp}$, et en prenant l'orthogonal, on obtient : $2\varphi(u, ?) + \lambda = k(2\varphi'(u, ?) + \lambda')$. En appliquant en u et en remarquant que $2\varphi(u, u) + \lambda(u) = 1 = 2\varphi'(u, u) + \lambda'(u)$ par construction, on voit que $k = 1$ et donc $2\varphi(u, ?) + \lambda = 2\varphi'(u, ?) + \lambda'$. On fait de même pour v et w et comme $(u - w, v - w)$ forme une base du plan vectoriel, on voit par une combinaison linéaire des égalités que les formes bilinéaires φ et φ' sont égales, puis, que $\lambda = \lambda'$, ce qui conclut notre affaire.

Méthode 4 (par le big théorème de Bezout) : On a deux ellipses qui s'intersectent en trois points doubles. On plonge le plan réel en un plan projectif complexe pour pouvoir appliquer le théorème de Bezout et affirmer que si, par l'absurde, elles sont distinctes, ces deux courbes de degré 2 irréductibles s'intersectent en exactement $2 \times 2 = 4$ points, multiplicités et points à l'infini compris. Donc, dans $\mathbb{R}^2$, le nombre d'intersections est forcément au plus égal à 4. Comme il vaut ici au moins 6, c'est que les courbes sont égales. (On remercie Daniel Perrin pour cette preuve)

Epilogue : L'existence et l'unicité de l'ellipse de Steiner assurent que l'on peut construire une application St de l'ensemble $\mathcal{T}$ des triangles (non dégénérés) du plan dans l'ensemble des ellipses du plan. Il peut être intéressant de réaliser que cette application provient d'une construction bien générale : c'est la surjection canonique d'un groupe G sur un sous-groupe H ; en l'occurrence, le groupe G est le groupe affine GA_2 et le sous-groupe H est le groupe orthogonal, ou si l'on préfère le sous-groupe des isométries possédant un point fixe O (fixé au départ). En effet, l'ensemble des triangles est une orbite pour l'action naturelle du groupe GA_2 avec un stabilisateur trivial (action simplement transitive sur les repères). Donc, l'ensemble $\mathcal{T}$ des triangles est en bijection avec GA_2 par $g \mapsto g(T)$, où T désigne un triangle, disons équilatéral, fixé de barycentre O (fixé). L'image $\mathrm{St}(T)$ est son cercle inscrit. De plus, on sait (si on a bien lu CVA !) que l'ensemble des ellipses est une orbite sous l'action naturelle de GA_2 et que l'application $\mathrm{St}(T)$ commute avec ces actions :

$$\mathrm{St}(g(T)) = g\left(\mathrm{St}(T)\right).$$

Maintenant, le stabilisateur du cercle de centre O pour l'action de GA_2 est le sous-groupe Is_O des isométries qui fixent O. On peut se convaincre de la seule partie délicate en remarquant que fixer le cercle revient à fixer l'orthogonalité des vecteurs puisque le groupe affine préserve la tangence. L'ensemble $\mathcal{E}$ des ellipses est donc en bijection avec $\mathrm{GA}_2/\mathrm{Is}_O$. Avec ces identifications, l'application St est alors l'application quotient $\mathrm{GA}_2 \mapsto \mathrm{GA}_2/\mathrm{Is}_O$; cela provient de l'unicité d'une application G-invariante d'une orbite sur une autre, et envoyant un élément fixé T sur un élément fixé C.

Cela signifie pour les topologues que l'application de l'ensemble des triangles (muni de la topologie de GA_2) vers l'ensemble des ellipses (muni de la topologie quotient $\mathrm{GA}_2/\mathrm{Is}_O$) est un *fibré principal*. On peut se demander s'il est trivial, c'est-à-dire si l'on peut trouver une section continue à ce fibré. La réponse est oui, grâce au théorème de décomposition polaire. En effet, on veut trouver une application continue qui envoie une ellipse sur un triangle dont elle serait l'ellipse de Steiner. D'après ce qui précède, cette ellipse peut être vue comme une classe $g\mathrm{O}_2$, avec g dans GA_2. Or, g se décompose en tg_O où t est une translation et g_O un élément de GA_2 qui fixe le point O. De plus, g_O se décompose en $S\Omega$, $S \in \mathcal{S}_2^{++}$ matrice symétrique réelle définie positive, $\Omega \in \mathrm{O}_2$. Par unicité de l'homéomorphisme de décomposition polaire on peut construire la section $g\mathrm{O}_2 \mapsto tS$, et donc construire un homéomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}_2^{++} \simeq \mathbb{R}^2 \times \exp(\mathcal{S}_2)$, où exp désigne l'exponentielle. C'est bien l'idée que l'on se fait d'une ellipse : la donnée d'un point central ($\mathbb{R}^2$), suivi de deux axes orthogonaux (les vecteurs propres de S) et d'une longueur grand axe/petit axe sur chaque axe (associés aux vecteurs propres).